数理解析研究所講究録
39巻 1968年 1-10

級数の総和法について

東北大 理 渡利千波

§0. 序

級数の行動とは，その級数の部分和の作る数列の行動であるから，級数の総和法は数列の変換に他ならない。数列が自然に線型空間をなすことから，総和法を与える変換でも一次変換が圧倒的に重要である。与えられた数列を，新しいパラメーターに依存する対象（数列または函数）に一次変換して，もとの数列の行動と新しい対象の行動との関係をしらべ，

1) 発散級数（の一部）に，収束級数に準じた取扱いを可能にする．

2) 収束級数の取扱いに，平坦な迂回路を提供する

のが総和法の理論であるといえようが，ここではその一般論の初等的な部分を紹介する。

つぎの2つは周知である：

例 1（Cauchy） $\sigma_n = (s_0 + s_1 + \cdots + s_n)/(n+1)$

とおくと， $s_n \to s \implies \sigma_n \to s \quad (n \to \infty)$.

例2 (Abel) $f(r)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n \quad (0 \leq r < 1)$

とおくと， $s_n=\sum_{k=0}^{n} a_k \to s \ (n\to\infty) \Rightarrow f(r)\to s \ (r\uparrow 1)$.

前者は sequence-to-sequence transformation の例であり，後者は sequence-to-function transformation の例である．（$s_n \to s$ であることにかかわらず，）もし $\sigma_n \to s$ が成立すれば「$\{s_n\}$ は s に $(C,1)$ 総和可能である」といい， $s_n \to s \ (C,1)$ と書く．

同様に， $f(r)\to s \ (r\uparrow 1)$ が成立すれば，「$\{s_n\}$（あるいは $\sum_0^{\infty} a_n$）は s に A 総和可能である」といい，

$s_n \to s \ (A)$， $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s \ (A)$ と書く．

sequence-to-function transformation も適当な解釈のもとに sequence-to-sequence transformation に帰着できるから，以下においては主として sequence-to-sequence transformation を考える．

§1 正則性

$T=(c_{mn})$ を一つの総和法とし，数列 $\{s_n\}$ の T による変換（の結果）を $\{t_m\}$ とする． G. H. Hardy [1] に従って つぎのような記号を用いる．

$\Sigma_c \equiv \{ T: \ \{s_n\} \text{ conv.} \Rightarrow \{t_m\} \text{ conv.} \}$

$\Sigma_r \equiv \{ T: \ s_n \to s \ (n\to\infty) \Rightarrow t_m \to s \ (m\to\infty) \}$

$$\mathfrak{T}_c^* \equiv \{ T : \{s_n\} \text{ bounded} \Rightarrow \{t_m\} \text{ conv.} \}$$

$\mathfrak{T}_r$, $\mathfrak{T}_c^*$ はいずれも $\mathfrak{T}_c$ の subclass であるが，定理2，定理3から，両者はたがいに素である。

以上の三つの族は完全に characterize されている。すなわち

定理1．$T \in \mathfrak{T}_c$ のためには，つぎの (i)，(ii)，(iii) の成立することが必要かつ十分である。

(i) $\exists H \quad \forall m \quad \gamma_m = \sum_n |c_{mn}| \leqq H$

(ii) $\forall n \quad \exists \lim_m c_{mn} \quad (= \delta_n$ とおく$)$

(iii) $\exists \lim_m \sum_n c_{mn} \quad (= \delta$ とおく$)$.

このとき，$\sum_n |\delta_n| \leqq H$ で，

$$s_n \to s \Rightarrow t_m \to t = \delta s + \sum_n \delta_n (s_n - s) = s(\delta - \sum \delta_n) + \sum \delta_n s_n$$

定理2．$T \in \mathfrak{T}_r$ のためには，前定理の (i)，(ii) (iii) が，$\delta_n = 0 \ (\forall n)$，$\delta = 1$ として成立することが必要かつ十分である。

定理3 $T \in \mathfrak{T}_c^*$ のためには，つぎの (i)′，(ii) の成立することが必要かつ十分である。

(i)′ $\sum_n |c_{mn}|$ conv. unit. in m

(ii) $\forall n \quad \exists \lim_{m} c_{mn} \quad (=\delta_n)$.

このとき、定理1の(i),(iii)は自動的に成立して、任意の有界数列 $\{s_n\}$ に対して $t_m \to t = \sum \delta_n s_n$ である。

応用上重要なのは、これらの定理で与えられている条件が十分であることで、十分性の証明は必要性の証明に比べて簡単である。定理1の十分性の証明を与えよう。

$$t_m = \sum_n c_{mn} s_n = \sum_n c_{mn}(s_n - s) + s \sum_n c_{mn}$$

$$t \qquad\qquad\qquad = \sum_n \delta_n (s_n - s) + s\delta$$

$$\therefore \quad t_m - t = \sum_n (c_{mn} - \delta_n)(s_n - s) + s\left(\sum_n c_{mn} - \delta\right)$$

右辺第2項は(iii)から $m \to \infty$ のとき $\longrightarrow 0$ である。第1項は、$n \geqq N \Rightarrow |s_n - s| < \varepsilon$ である $N = N(\varepsilon)$ を固定すると絶対値において

$$\sum_{n=0}^{N-1} |c_{mn} - \delta_n| \left(|s_n| + |s|\right) + \varepsilon \sum_{n=N}^{\infty} \left(|c_{mn}| + |\delta_n|\right)$$

をこえない。この第1項は $m \to \infty$ のとき $\longrightarrow 0$ であり、第2項は $\leqq 2H\varepsilon$ であるから $t_m \to t$ である。

ここで、"Banach Limit" は、有界数列 $\{s_n\}$ に直接（t_m という様な「中間生成物」なしに）「極限値」を与えるものであるから、われわれの「総和法」には該当しないことを注意しておく。

Σ_r に属する総和法は 正則 regular であるという。前の例1, 例2 から, (C,1) および (A) はともに regular である。

§2. 比較 Abel 型 および Tauber 型定理

T_1, T_2 を2つの総和法とするとき, T_1 総和可能である任意の数列が, 同じ極限値に T_2 総和可能であるならば, 「T_2 は T_1 よりも強力である」, 「T_2 は T_1 を含む」といって, $T_1 \subset T_2$ であらわす。 $T_1 \subset T_2$, $T_2 \subset T_1$ の両方が成立することを $T_1 \sim T_2$ であらわせば, $\sim$ は同値関係であり, $\subset$ は ($\sim$ による同値類の間の) 半順序となる。

$T_1 \subset T_2$ を示す定理を Abel 型定理という。
($T_1 \subset T_2$ であり $T_2 \subset T_1$ ではない場合に) T_2 総和可能な数列 (あるいは級数) が, ある種の付帯条件 (Tauber 型の条件) をみたせば, 実は T_1 総和可能である という定理を Tauber 型定理という。 総和法の正則性を主張する定理は, 特殊な (T_1 として恒等変換をとった) Abel 型定理である。

例 3 $\quad (C,1) \subset A$

例 4 (Tauber) $\quad \left.\begin{array}{l} \sum a_n = s \ (A) \\ n a_n \to 0 \ (n \to \infty) \end{array}\right\} \Rightarrow \sum a_n = s$

例 5 (Littlewood) $\left.\begin{array}{l}\sum a_n = s \quad (A) \\ \exists K>0 :\ |na_n| \leqq K\end{array}\right\} \Rightarrow \sum a_n = s$

例 6 (Hardy-Littlewood) $\left.\begin{array}{l}\sum a_n = s \quad (A) \\ \exists K>0 :\ na_n \leqq K\end{array}\right\} \Rightarrow \sum a_n = s$

例 4 ~ 6 は、この順に改良された命題であるが、例 6 の巧妙な証明が H. Wielandt [4] によって与えられた。以下これを紹介する。

一般性を失うことなく、$a_0 = s = 0$, $K = 1$ と仮定できる。したがって、

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \to 0 \ (x \uparrow 1) \\ a_n \text{ real}, \quad na_n \leqq 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n = 0$$

を証明すればよい。

$[0, 1)$ で定義された実数値函数の族を、つぎのように定める。

$$\mathfrak{F} = \left\{ g : \sum_{n=1}^{\infty} a_n g(x^n) \text{ conv. } (\equiv G(x)), \to 0 \ (x \uparrow 1) \right\}$$

$g^* = \chi_{[\frac{1}{2}, 1)}$ が $\mathfrak{F}$ に属することを示せば、証明は完了する。容易に見られるように

1° $\mathfrak{F}$ は linear space である

2° $g \in \mathfrak{F} \Rightarrow g^k \in \mathfrak{F}$ (k は正整数)

3° $x \in \mathfrak{F}$

したがって、定数項が 0 である多項式は $\in \mathfrak{F}$ である。ところが、このような多項式で「十分よく」近似できる函数

が $\mathcal{F}$ の元になる。正確には

g : $\sum a_n g(x^n)$ conv. for $0 \leqq x < 1$

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists p_1, p_2$ polynomials in $\mathcal{F}$ $p_1(x) \leqq g(x) \leqq p_2(x)$

$$q(x) = \frac{p_2(x) - p_1(x)}{x(1-x)} \quad \text{polynomial,} \quad \int_0^1 q(x)\,dx < \varepsilon$$

$\Rightarrow g \in \mathcal{F}$

である。このためには $G(x) \to 0$ $(x \uparrow 1)$ を示せばよいが、

$$G(x) - \sum a_n p_1(x^n) = \sum a_n (g(x^n) - p_1(x^n))$$

$$\leqq \sum \frac{1}{n}(g(x^n) - p_1(x^n)) \leqq \sum \frac{1}{n}(p_2(x^n) - p_1(x^n))$$

$$= \sum \frac{1}{n} x^n (1 - x^n) q(x^n) \leqq \sum (1-x) x^n q(x^n)$$

$q(x) = \sum_{j=0}^{k} b_j x^j$ として、n に関する和を先に計算すると

$$= (1-x) \sum_{j=0}^{k} b_j \cdot \frac{x^{j+1}}{1-x^{j+1}} = \sum_{j=0}^{k} \frac{b_j x^{j+1}}{1+x+\cdots+x^j}$$

$x \uparrow 1$ のときこれは $\to \sum_{j=0}^{k} \frac{b_j}{j+1} = \int_0^1 q(x)\,dx < \varepsilon$ であるから、両端辺の上極限を考えて $\limsup_{x \uparrow 1} G(x) \leqq \varepsilon$

$\sum a_n p_2(x^n) - G(x)$ を考えて同様に計算すると $g \in \mathcal{F}$ が知られる。

$\frac{g^*(x) - x}{x(1-x)}$ の不連続点は $x = \frac{1}{2}$ だけであるから、グラフを「ごくわずか」上下に動かして、$x = \frac{1}{2}$ の近傍で修正して連続にしたものを多項式近似して $q_1(x)$, $q_2(x)$ を作り、

$p_i(x) = x + x(1-x)q_i(x)$　　とおけば　$g^* \in \mathfrak{F}$　が見られる。

諸種の総和法の間に、いろいろなTauber型条件をおいての Tauber型定理を統一的に扱うことを可能にした Wiener の General Tauberian Theorem については、N. Wiener [2]、Hardy 前出[1] 第12章　等を見られたい。

序　に述べた「収束級数を取扱う際の平坦な迂回路」が、実は Tauber 型定理である。

実例をあげよう。連続かつ有界変分な周期函数の Fourier 級数は一様収束するが、この事実はつぎのようにしても証明できる。

1°. 連続函数の Fourier 級数は一様に (C,1) 総和可能である。(Fejér の定理)

2° 有界変分函数の Fourier 級数の項は、一様に 例5 の Tauber 型条件をみたす。

したがって例3、例5から（一様性について若干の注意は必要であるが、それは簡単である）結論が得られる。

§3. 函数の近似と総和法

ここでは、周期函数を、その Fourier 級数を変換したもので近似する問題を考える。L^2 近似の場合は、Fourier 級数の部分和が最良近似を与えて、総和法を考える必要がないが、L^2

から離れた函数空間，たとえば $C[-\pi,\pi]$，$L^1[-\pi,\pi)$ 等では，部分和では近似できない函数があるから，総和法を考えるのが自然である． この際，総和法としては正則なものをとるのが自然であるが，正則であるための条件をつぎのように書き直すと便利である．

定理2′　(収束)級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ を数列 $\{t_m\}$　$t_m = \sum_n d_{mn} a_n$ に変換する総和法 $T = (d_{mn})$ が正則であるためには，

(i)　$\exists H$　$\forall m$　$\sum_n |d_{m,n} - d_{m,n+1}| \leqq H$

(ii)′　$\forall n$　$\lim_{m\to\infty} d_{mn} = 1$.

の成立することが，必要かつ十分である．

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} A_n(x), \qquad \begin{cases} A_0(x) = \dfrac{a_0}{2} \\ A_n(x) = a_n \cos nx + b_n \sin nx \end{cases}$$

から $P_m(x;f) = \sum_{n=0}^{\infty} d_{mn} A_n(x)$ を作り，$f(x)$ を $P_m(x:f)$ で近似する場合，「強力な」総和法がよい近似を与えるとは限らない。 (ii)′ の $d_{mn} \to 1$ $(m\to\infty)$ となる速さと関連して，近似度の飽和という現象が生ずることがあり，P. L. Butzer, G. Sunouchi 他によって一連の結果が得られている． ほぼ最良な近似を与えるものとして，de la Vallée Poussin の与えた "delayed (C, 1)" 総和法がある． その一つの形は $2\sigma_{2n-1} - \sigma_{n-1}$ (例1参照) である。

文献および注

単行本

[1] G. H. Hardy, Divergent series, Oxford, 1949.

[2] N. Wiener, The Fourier integral and certain of its applications, Cambridge, 1933.

[3] K. Zeller, Theorie der Limitierungsverfahren, Ergebnisse der Math., Springer, 1958
(巻末に64ページにわたって, 1955年までの文献表あり)

論文・報告

[4] H. Wielandt, Zur Umkehrung des Abelschen Stetigkeitssatzes, Math. Z. 56 (1952), 206 ~ 207.

[5] 石黒一男, 発散級数の総和法について, 実函数論分科会第4回シンポジューム綜合講演集録 21 − 29 (1965)

[6] 洲之内源一郎, 三角多項式による函数の近似について, 「近似理論」研究会 (1966) 予稿

[5] には, 総和法の理論の各論とでもいうべき, 種々の総和法の比較が克明に行われている.